ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. 1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία y=ℓ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει f(x)≥0 τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγώγισιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) >0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν α>1 τότε $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2 + ai}{a + 2i}$ με $a \in R$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+ai}{a+2i}$ για α=0 και α=2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, x\in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, και $\Gamma(x_3, f(x_3))$, βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)\,dt,\ x\in[0,1]$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\ x\in[0,1]$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) \cdot x^5}$

Μονάδες 7