Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|, x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει :

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\ .$$

(Μονάδες 10)

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α , β] ;

(Μονάδες 5)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη ***Σωστό*** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή ***Λάθος*** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 , τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει : $f^{-1}(f(x))=x, x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y, y\in f(A)$. **Σ Λ**

(Μονάδες 2)

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της . **Σ Λ**

(Μονάδες 2)

γ) Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με α , β , γ $\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική , τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών . **Σ Λ**

(Μονάδες 2)

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . **Σ Λ**

(Μονάδες 2)

ε) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α , β , γ $\in$ Δ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx\ .$$ **Σ Λ**

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $|(i+2\sqrt{2})z|=6$ και $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$ τότε να βρείτε :

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

(Μονάδες 6)

β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w **.**

(Μονάδες 7)

γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

(Μονάδες 6)

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .

(Μονάδες 3)

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}.$$

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε :

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

(Μονάδες 10)

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 .

(Μονάδες 3)