

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 2009

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 10)

B. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Μονάδες 2)

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 2)

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

(Μονάδες 2)

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 2)

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=a, x=\beta$

και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

(Μονάδες 8)

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ όπου ο μιγαδικός αριθμός z_0 που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

(Μονάδες 8)

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή,

(Μονάδες 5)

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$,

(Μονάδες 6)

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$, $x \in [0, 2]$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

(Μονάδες 5)

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, 0 < x < 2.$$

(Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt.$$

(Μονάδες 7)