Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

  $G(x)=F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

  $G(x)=F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Α2 . Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β)Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ)Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου Α= $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και Β= $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

δ)$(\text{συν}x)' = \text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

ε)Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$.

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3 \le |w| \le 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right].$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{x}^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7