

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής 2009

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Μονάδες 10)

B. Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$.

(Μονάδες 2)

β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι $A - B = A \cap B'$.

(Μονάδες 2)

γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ ισχύει ότι $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$.

(Μονάδες 2)

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες v_i , $i=1, 2, 3, 4$. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $v_2=7$.

(Μονάδες 9)

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

(Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι

$$\sqrt{4,9} \approx 2,2.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $a=9$.

(Μονάδες 7)

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.

(Μονάδες 8)

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2, x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2), f(4), f(8), f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δείχθει ότι $R = 3 + \ln \frac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

(Μονάδες 7)

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$.

(Μονάδες 6)